

## ISS E STABILITA' DI SISTEMI INTERCONNESSI

### Notazioni

Dato un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$ , si denoterà con  $\|x\|$  la norma euclidea di  $x$ . Dato inoltre un vettore  $x(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , indicheremo con  $\|x(\cdot)\|_\infty$  la quantità

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\| .$$

e con  $\|x(\cdot)\|_a$  la *norma asintotica* di  $x(t)$  definita come

$$\|x(\cdot)\|_a = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| .$$

Denoteremo inoltre con  $L_\infty^m$  l'insieme dei segnali  $u(t)$ ,  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  che sono funzioni continue a tratti e caratterizzati da norma  $\|u(\cdot)\|_\infty$  finita.

Una funzione  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  verrà detta di classe  $\mathcal{K}$  se è continua, strettamente crescente e tale che  $\alpha(0) = 0$ . Nel caso  $a = \infty$  e  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$  allora verrà detta di classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

Con il termine classe- $\mathcal{KL}$  si denoterà invece l'insieme delle funzioni continue  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  che godono della seguente proprietà: fissato  $s$ , la funzione  $\beta(r, s)$  risulta essere di classe  $\mathcal{K}$  rispetto  $r$ ; fissato  $r \in [0, a)$ , la funzione  $\beta(r, s)$  risulta essere monotona decrescente rispetto ad  $s$ , con  $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$ .

Infine, una funzione  $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  è detta di classe  $\mathcal{N}$  se risulta essere continua e non-decrescente. Si noti che una funzione  $\eta(\cdot)$  di classe  $\mathcal{N}$  *non* soddisfa necessariamente  $\eta(0) = 0$ .

## 1 Stabilità ingresso-stato (*Input-to-state stability*)

(Riferimenti bibliografici: [4], [1], [3], [11]) L'obiettivo di questo paragrafo è la presentazione di importanti concetti relativi alla “stabilità interna” di sistemi dinamici nonlineari, ovvero lo studio del comportamento delle traiettorie nel caso di segnali forzanti esogeni. A differenza dei sistemi lineari, la stabilità globale asintotica di un punto di equilibrio di un sistema nonlineare non implica, in generale, la limitatezza (e addirittura l'esistenza) delle sue traiettorie in presenza di segnali esogeni limitati. A tale riguardo si possono considerare i seguenti esempi.

*Example.* Si consideri per esempio il sistema 1-dimensionale

$$\dot{x} = -x + xu \tag{1}$$

che risulta GES per  $u = 0$  ma che origina, per esempio con  $u(t) = 2$ ,  $t \geq 0$ , traiettorie divergenti.

*Example.* Si consideri il sistema 1-dimensionale (sistema che addirittura è “feedback-linearizzabile”)

$$\dot{x} = -x + (x^2 + 1)u \tag{2}$$

che risulta essere GAS (e anche GES) nel caso  $u = 0$ . Tuttavia a fronte di un ingresso limitato del tipo

$$u(t) \equiv 1 \quad t \geq 0$$

si ottiene che, anche con condizione iniziale  $x(0) = 0$ , la traiettoria diverge.

Si noti inoltre come si possono avere traiettorie illimitate anche in caso di ingressi  $u(t)$  asintoticamente tendenti a zero. Per esempio la traiettoria del sistema (2) a partire dallo stato iniziale  $x^o = \sqrt{2}$  e con segnale forzante

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+2}},$$

risulta essere

$$x(t) = \sqrt{2t+2}$$

ovvero diverge per  $t \rightarrow \infty$ .

Possono esserci addirittura casi in cui, in seguito all'applicazione di un segnale costante, la traiettoria diverga in *tempo finito*.

*Example.* Consideriamo il sistema 1-dimensionale

$$\dot{x} = -x + (1-x)xu.$$

Chiaramente tale sistema risulta essere globalmente esponenzialmente stabile nel caso  $u \equiv 0$ . Tuttavia a fronte di un segnale limitato  $u(t) = 1, t \geq 0$ , la traiettoria che si origina dal punto  $x(0) = -1$  risulta essere

$$x(t) = \frac{1}{t-1}$$

ovvero in tempo finito (*Finite escape time*) diviene illimitata.

Gli esempi sopra presentati fanno intuire la necessità di una definizione “ad hoc” per lo studio di sistemi perturbati, ovvero una definizione di stabilità più forte della stabilità globale asintotica, che garantisca comunque la limitatezza delle traiettorie a fronte di segnali perturbanti limitati.

## 1.1 Definizione di ISS e caratterizzazione in termini di funzione di Lyapunov

Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3}$$

con stato  $x \in \mathbb{R}^n$  e ingresso  $u \in \mathbb{R}^m$ , dove  $f(0, 0) = 0$  e  $f(x, u)$  è localmente Lipschitz in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . La stabilità ingresso-stato (*Input to State Stability*) è quindi definita nel modo seguente (si veda [4]):

*Definition.* Il sistema (3) è detto ISS (Input to State Stable) se esiste una funzione  $\beta(\cdot, \cdot)$  di classe  $\mathcal{KL}$  e una funzione  $\gamma(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che, per ogni funzione di ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  e ogni condizione iniziale  $x^o \in \mathbb{R}^n$ , la risposta  $x(t)$  del sistema (3) soddisfa

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x^o\|, t) + \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty) \tag{4}$$

per ogni  $t > 0$ .

*Remark.* Si osservi che essendo  $\max\{\beta, \gamma\} \leq \beta + \gamma \leq \max\{2\beta, 2\gamma\}$ , per ogni coppia  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ , allora un modo alternativo per definire la proprietà di ISS è richiedere che esista una funzione  $\beta(\cdot, \cdot)$  di classe  $\mathcal{KL}$  e una funzione  $\gamma(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che, per ogni funzione di ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  e ogni condizione iniziale  $x^o \in \mathbb{R}^n$ , la risposta  $x(t)$  del sistema (3) soddisfa

$$\|x(t)\| \leq \max\{\beta(\|x^o\|, t), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\} . \quad (5)$$

per ogni  $t > 0$ .

Ovviamente tale definizione assicura l'esistenza e la limitatezza delle traiettorie del sistema a fronte di un qualunque ingresso limitato e a partire da un qualunque stato iniziale. Si noti inoltre come la precedente definizione ‘‘catturi’’ l’idea base di ingresso limitato-stato limitato. Innanzitutto nel caso  $\|u(\cdot)\|_\infty = 0$  (ovvero in assenza di un termine forzante), la definizione impone che la norma del flusso del sistema sia limitata superiormente da una funzione decrescente a zero, ovvero impone che lo stato tenda asintoticamente verso il punto di equilibrio  $x = 0$  (stabilità globale asintotica). La funzione che limita superiormente la norma del flusso dipende dalla norma dello stato iniziale  $x^o$  e in particolare, fissato un certo istante  $t^*$ , risulta essere una funzione di classe  $\mathcal{K}$  (ovvero funzione crescente dello stato iniziale che si annulla per argomento nullo). Nel caso di forzamento non nullo la precedente disuguaglianza assicura che l’evoluzione dello stato si mantenga in norma minore della somma di un primo contributo che esprime la dipendenza dallo stato iniziale e che svanisce asintoticamente, e un secondo contributo ‘‘persistente’’ dipendente (secondo una dipendenza di classe  $\mathcal{K}$ ) dall’estremo superiore della norma dell’ingresso.

*Remark.* Si noti come la proprietà di ISS sia più forte della proprietà GAS + BIBS (Bounded Input-Bounded State) dal momento che richiede che la stima asintotica dello stato dipenda solamente dall’andamento del controllo e non dal valore dello stato iniziale. A tale riguardo si consideri il sistema

$$\dot{x} = (\sin^2 u - 1)x .$$

Questo sistema risulta essere BIBS e GAS (nel caso  $u = 0$ ). Tuttavia se  $u \equiv \pi/2$  l’evoluzione dello stato non ha un valore asintotico indipendente dallo stato iniziale. Quindi tale sistema non è ISS.

Come sopra evidenziato, un sistema ISS risulta essere necessariamente GAS in caso di forzamento nullo. E’ lecito quindi attendersi una caratterizzazione della proprietà di ISS in termini di funzione di Lyapunov ([7]).

*Definition.* Una funzione  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di tipo  $\mathcal{C}^1$  è detta una funzione di Lyapunov ISS (ISS-Lyapunov function) per il sistema (3) se esistono delle funzioni  $\underline{\alpha}(\cdot)$ ,  $\bar{\alpha}(\cdot)$ ,  $\alpha(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$  e una funzione  $\chi(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

e

$$\|x\| \geq \chi(\|u\|) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n . \quad (7)$$

Una definizione alternativa, spesso più vantaggiosa in termini operativi, risulta essere la seguente.

*Definition.* Si consideri il sistema (3). Una funzione  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di tipo  $\mathcal{C}^1$  è una funzione di Lyapunov ISS se e solo se esistono delle funzioni  $\underline{\alpha}(\cdot)$ ,  $\bar{\alpha}(\cdot)$ ,  $\alpha(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$  e una funzione  $\sigma(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che vale la relazione (6) e

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma(\|u\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (8)$$

La equivalenza tra le due definizioni sopra riportate non verrà presentata. Ci limiteremo solo ad evidenziare che data una funzione di Lyapunov ISS  $V$  che soddisfa la relazione (19), allora  $V$  soddisfa anche (7) con la funzione  $\chi(\cdot)$  definita come

$$\chi(r) = \alpha^{-1}(k\sigma(r))$$

con  $k$  numero arbitrario maggiore di uno.

Si noti che nel caso  $\|u(t)\| \equiv 0$  l'esistenza di funzione di Lyapunov ISS corrisponde a quella di una funzione di Lyapunov "classica", ovvero alla proprietà di stabilità asintotica globale dell'equilibrio del sistema nell'origine. La relazione tra la proprietà di ISS del sistema (3) e l'esistenza di una funzione di Lyapunov ISS è dato dal seguente teorema che generalizza il criterio di Lyapunov per la stabilità asintotica.

**Theorem 1** ([7]) *Il sistema (3) risulta essere ISS se e solo se esiste una funzione di Lyapunov ISS.*

La dimostrazione per quel che riguarda la sufficienza (ovvero che se esiste una funzione di Lyapunov ISS allora il sistema (3) è ISS) è qui riportata (nel seguito si farà riferimento alla definizione (1.1)).

Sia

$$M = \|u(\cdot)\|_\infty$$

e si fissi

$$c = \bar{\alpha}(\chi(M)).$$

Dalla disuguaglianza (6) si ha quindi che, definendo

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$$

risulta

$$B_{\chi(M)} \subset \Omega_c.$$

Questo significa che  $\|x(t)\| \geq \chi(M)$  per ogni  $t \geq 0$  tale che  $x(t)$  appartenga alla frontiera di  $\Omega_c$ . Pertanto, in virtù della relazione (7)

$$x(t) \in \partial\Omega_c \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) < 0.$$

Di conseguenza, l'insieme compatto  $\Omega_c$  risulta essere positivamente invariante, ovvero per ogni condizione iniziale  $x'(0) \in \Omega_c$  la traiettoria  $x'(t)$  del sistema (3) è definita per ogni  $t \geq 0$  e inoltre  $x'(t) \in \Omega_c$  per ogni  $t \geq 0$ . Dalla relazione (6) segue anche che

$$\|x'(t)\| \leq \underline{\alpha}^{-1}(V(x'(t))) \leq \underline{\alpha}^{-1}(c) = \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha}(\chi(M)) .$$

Quindi, definendo

$$\gamma(r) := \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha}(\chi(r)) \quad (9)$$

si ha che

$$\|x'(t)\| \leq \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty) \quad (10)$$

ovvero

$$\|x'(\cdot)\|_\infty \leq \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty) .$$

La precedente trattazione ha quindi mostrato che qualunque traiettoria  $x(t)$  originante all'interno di  $\Omega_c$  è caratterizzata da un bound  $\|x(t)\| \leq \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)$  per ogni  $t$  e questo implica che la disuguaglianza (4) è verificata.

Consideriamo ora il caso in cui  $V(x(0)) > c$ , ovvero supponiamo che la traiettoria del sistema abbia origine al di fuori del compatto  $\Omega_c$ . In questo caso si ha che fintantochè  $V(x(t)) > 0$  allora  $\|x(t)\| > \chi(\|u(t)\|)$  e quindi dalla definizione di funzione di Lyapunov ISS

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x(t), u(t)) \leq -\alpha(\|x(t)\|) < 0$$

Quindi si ha che  $V(x(t)) > c \Rightarrow \dot{V}(x(t)) < 0$ . In particolare questo mostra da un lato che la traiettoria  $x(t)$  è limitata (infatti  $\|x(t)\| \leq \underline{\alpha}^{-1}(V(x(t))) \leq \underline{\alpha}^{-1}(V(x(0)))$ ), e dall'altro che in tempo finito (diciamo  $t_0$ ) si ha che  $V(x(t_0)) = c$ . Semplici calcoli mostrano che nel lasso di tempo  $[0, t_0]$  la traiettoria del sistema soddisfa la relazione

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x^o\|, t)$$

con  $\beta(\cdot, \cdot)$  opportuna funzione di classe  $\mathcal{KL}$ . Dato che per  $t \geq t_0$  vale (10), si conclude che

$$\|x(t)\| \leq \max\{\beta(\|x^o\|, t), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\}$$

ovvero che il sistema risulta ISS. Questo conclude la dimostrazione della parte sufficiente del teorema (1).

La definizione di ISS data all'inizio del paragrafo può essere modificata al fine di ottenere diverse definizioni equivalenti. Innanzitutto notiamo, dalla definizione di funzione di classe  $\mathcal{KL}$ , che

$$\beta(\|x^o\|, t) \leq \beta(\|x^o\|, 0) \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

e che  $\beta(\cdot, 0)$  risulta essere una funzione di classe  $\mathcal{K}$ . Da questi semplici ragionamenti discende che se il sistema (3) è ISS allora la risposta  $x(t)$  a fronte di un qualunque ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  è limitata e soddisfa la relazione

$$\|x(\cdot)\|_\infty \leq \max\{\gamma_0(\|x^o\|), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \quad (11)$$

dove  $\gamma_0(\cdot)$  è una funzione di classe  $\mathcal{K}$  opportunamente definita (e  $\gamma(\cdot)$  è la funzione di classe  $\mathcal{K}$  sopra definita).

Inoltre si noti che, essendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(\|x^o\|, t) = 0,$$

allora

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty). \quad (12)$$

La precedente disuguaglianza formalizza l'intuizione che asintoticamente l'evoluzione della traiettoria è dipendente solo dall'azione forzante (e non dallo stato iniziale il cui effetto svanisce asintoticamente). Il seguente lemma specializza la precedente disuguaglianza evidenziando come solo il contributo asintotico dell'ingresso influenzi il comportamento asintotico della traiettoria nello spazio degli stati.

**Lemma 1** *La proprietà (12) è equivalente alla proprietà*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \gamma(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|). \quad (13)$$

Le precedenti considerazioni mostrano come la disuguaglianza (5) implichi necessariamente le disuguaglianze (11) e (13) (con la funzione  $\gamma_0(\cdot)$  definita come  $\beta(\cdot, 0)$ ). Il seguente teorema (per una dimostrazione si veda [1]), evidenzia come in realtà le disuguaglianze (11) e (13) siano una caratterizzazione equivalente di stabilità ISS (si veda [2]).

**Theorem 2** *Il sistema (3) risulta essere stabile ingresso-stato nel caso esistano delle funzioni  $\gamma_0(\cdot)$  e  $\gamma(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che, per ogni funzione di ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  e ogni condizione iniziale  $x^o \in \mathbb{R}^n$ , la risposta  $x(t)$  del sistema soddisfa*

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x^o\|, \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty))\} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \gamma(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|). \end{aligned}$$

## 2 Stabilità esterna, interna e rilevabilità

(riferimenti bibliografici: [10], [11])

La precedente definizione di stabilità ingresso limitato-stato limitato è quella che formalizza il concetto di “stabilità interna” di un sistema dinamico nonlineare, ovvero la caratteristica di evolvere con stati “interni” limitati a fronte di segnali esogeni arbitrari ma limitati. Tale definizione può essere opportunamente adattata al fine di caratterizzare anche la “stabilità esterna” di un sistema dinamico con ingresso  $u$  e uscita  $y$  del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & x &\in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= h(x) & y &\in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (14)$$

dove  $h(x)$  rappresenta una funzione vettoriale smooth. Si può in altre parole definire un sistema nonlineare (14) come “esternamente stabile” nel caso che partendo da un qualunque stato iniziale e a fronte di un qualunque segnale d'ingresso limitato, l'uscita  $y(t) = h(x(t))$

risulta essere limitata, e l'ampiezza dell'uscita dipenda in maniera continua dallo stato iniziale e dalla norma dell'ingresso. Tale concetto può essere formalizzato nella seguente maniera.

*Definition.* **(IOS)** Il sistema (14) risulta essere stabile ingresso-uscita (*Input to Output Stable, IOS*), nel caso esista una funzione  $\beta(\cdot, \cdot)$  di classe  $\mathcal{KL}$  e una funzione  $\gamma(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che, per ogni funzione di ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  e ogni condizione iniziale  $x^o \in \mathbb{R}^n$ , la risposta  $y(t) = y(x(t))$  del sistema (3) soddisfi

$$\|y(t)\| \leq \beta(\|x^o\|, t) + \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty) \quad (15)$$

per ogni  $t > 0$ . Come è lecito aspettarsi è anche possibile caratterizzare la proprietà IOS di un sistema in termini di funzioni di Lyapunov. In particolare si ha la seguente definizione di funzione di Lyapunov IOS.

*Definition.* Una funzione  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  di tipo  $\mathcal{C}^1$  è detta una funzione di Lyapunov IOS (IOS-Lyapunov function) per il sistema (14) se esistono funzioni  $\underline{\alpha}(\cdot)$ ,  $\bar{\alpha}(\cdot)$ ,  $\alpha(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$  e una funzione  $\chi(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che

$$\underline{\alpha}(\|h(x)\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \quad (16)$$

e

$$V(x) \geq \chi(\|u\|) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) < 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \quad (17)$$

Come nel caso della stabilità ISS vale il risultato che un sistema risulta essere ISS se e solo esiste una ISS-Lyapunov function, anche in questo contesto può essere formulato un risultato analogo.

**Theorem 3** *Il sistema (14) risulta essere IOS se e solo se ammette una funzione di Lyapunov IOS.*

Assumendo che la funzione di uscita  $h(x)$  esista per ogni  $x$  e sia limitata per  $x$  limitato, allora è alquanto intuitivo che la stabilità interna del sistema (14) (stabilità ISS) implichi la stabilità esterna (stabilità IOS). Il viceversa risulta vero<sup>1</sup> solo nel caso il sistema possieda una proprietà di *rilevabilità* di seguito espressa sempre in termini di “funzioni di confronto”.

*Definition.* **(IOSS)** Il sistema (14) risulta essere stabile ingresso-stato-uscita (*Input-Output to State Stable, IOSS*), nel caso esista una funzione  $\beta(\cdot, \cdot)$  di classe  $\mathcal{KL}$  e una funzione  $\gamma(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$  tali che, per ogni funzione di ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  e ogni condizione iniziale  $x^o \in \mathbb{R}^n$ , l'evoluzione  $x(t)$  del sistema (3) soddisfi

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x^o\|, t) + \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty) + \gamma(\|y(\cdot)\|_\infty) \quad (18)$$

per ogni  $t > 0$ .

Come sopra si può dare una caratterizzazione della proprietà di IOSS in termini di funzioni di Lyapunov ed enunciare l'equivalenza tra tale proprietà e l'esistenza di “IOSS Lyapunov functions”.

---

<sup>1</sup>Notare l'analogia con i sistemi lineari in cui si ha stabilità interna *se e solo se* il sistema risulta stabile esternamente e rilevabile.

*Definition.* Si consideri il sistema (14). Una funzione  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  di tipo  $\mathcal{C}^1$  è una funzione di Lyapunov IOSS se e solo se esistono delle funzioni  $\underline{\alpha}(\cdot)$ ,  $\bar{\alpha}(\cdot)$ ,  $\alpha(\cdot)$ ,  $\sigma_1(\cdot)$  e  $\sigma_2(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$  tali che vale la relazione (6) e

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|) + \sigma_1(\|u\|) + \sigma_2(\|y\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p. \quad (19)$$

**Theorem 4** *Il sistema (14) risulta essere IOSS se e solo esiste una funzione di Lyapunov IOSS.*

Vale allora l'importante risultato, sopra anticipato, che estende allo studio di sistemi nonlineari la relazione nota tra stabilità esterna, interna e rilevabilità di sistemi lineari.

**Theorem 5** *Per il sistema (14) vale*

$$\text{ISS} \quad \iff \quad \text{IOS} + \text{IOSS} .$$

## 2.1 Limitatezza ultimativa globale uniforme

Una proprietà più debole della ISS, utile in un certo numero di applicazioni nel controllo robusto ed adattativo, è nota come limitatezza ultimativa globale uniforme (*Global Uniform Ultimate Boundedness, GUUB*) delle traiettorie del sistema (3).

*Definition.* Il sistema (3) è detto godere della proprietà di limitatezza ultimativa globale uniforme delle sue traiettorie se esiste una funzione  $\eta(\cdot)$  di classe  $\mathcal{N}$  tale che per ogni condizione iniziale  $x^\circ$  e ogni ingresso  $u \in \mathcal{L}_\infty^m$  risulti

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \eta(\|u\|_\infty) \quad (20)$$

Si noti che nella definizione di GUUB è implicito che il sistema abbia soluzioni limitate, e pertanto definite per ogni  $t \geq 0$ , a fronte di ingressi limitati (incluso l'ingresso identicamente nullo). Inoltre, è facile dimostrare che la proprietà (20) risulta equivalente alla

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \eta(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|)$$

La proprietà GUUB gode anch'essa di una caratterizzazione “alla Lyapunov”, espressa dal seguente teorema.

**Theorem 6** *Il sistema (3) gode della proprietà GUUB se esiste una funzione  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di tipo  $\mathcal{C}^1$ , funzioni  $\underline{\alpha}(\cdot)$ ,  $\bar{\alpha}(\cdot)$ ,  $\alpha(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$  e una funzione  $\chi(\cdot)$  di classe  $\mathcal{N}$  tali che*

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \quad (21)$$

$$\|x\| \geq \chi(\|u\|) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (22)$$

*In tal caso, la funzione  $\eta(\cdot)$  della Definizione 2.1 è data dalla funzione composta  $\eta(s) = (\underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha} \circ \chi)(s)$ .*



Risulta assai facile verificare come, nonostante le affinità, la proprietà GUUB sia assai più debole della ISS. Mentre è ovvio che ISS implica GUUB, il viceversa non sussiste. In primo luogo, la GUUB non implica che esistano stime uniformi sulla norma  $\mathcal{L}_\infty$  delle traiettorie in funzione dello stato iniziale e dell'ampiezza dell'ingresso, come dalla definizione equivalente di ISS data nel Teorema 2. Inoltre, si noti che ad ingressi convergenti, cioè per cui  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$ , non corrispondono necessariamente traiettorie convergenti nello spazio degli stati. Ciò è dovuto al fatto che  $\eta(\cdot)$  appartiene alla classe  $\mathcal{N}$ , e quindi non necessariamente  $\eta(0) = 0$ . Questo rende possibile estendere una nozione di limitatezza delle traiettorie con ampiezza asintotica funzione dell'ingresso a sistemi che non possiedono necessariamente un equilibrio asintoticamente stabile nell'origine in assenza di ingresso forzante. A titolo di esempio, si consideri il sistema scalare

$$\dot{x} = x - x^3 + u.$$

Tale sistema possiede un equilibrio instabile in  $x = 0$ , come si può verificare analizzando l'approssimazione lineare. Tuttavia, il sistema risulta godere della proprietà GUUB, come risulta dall'applicazione del Teorema 6.

In ultima analisi, è lecito chiedersi quale sia il *gap* tra le proprietà di ISS e di GUUB. Il seguente teorema scioglie questo nodo, stabilendo l'equivalenza tra la classe di sistemi ISS e quelli che godono della proprietà GUUB insieme alla stabilità asintotica globale dell'equilibrio del sistema privo di forzamento.

**Theorem 7** *Per il sistema (3) vale la seguente relazione*

$$\text{ISS} \quad \iff \quad \text{0-GAS} + \text{GUUB}.$$

### 3 Analisi di sistemi in cascata

(riferimenti bibliografici: [1],[3], [5])

In questo paragrafo verranno presentati alcuni risultati che riguardano la cascata di due sistemi dinamici. In altre parole ci si concentrerà sulla interconnessione

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z) \\ \dot{z} &= g(z) \end{aligned} \tag{23}$$

studiando come proprietà elementari dei sistemi

$$\dot{x} = f(x, 0) \tag{24}$$

e

$$z = g(z) \tag{25}$$

si “conservino” per la cascata (23).

Supporremo che  $x = 0$  e  $z = 0$  siano punti di equilibrio per i due sistemi privi di forzamento,

ovvero  $f(0,0) = 0$  e  $g(0) = 0$ . Innanzitutto è importante notare che nel caso  $x = 0$  e  $z = 0$  siano punti di equilibrio *globalmente asintoticamente stabili* dei due sottosistemi (24)-(25), allora non è necessariamente vero che il punto di equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$  della cascata (23) sia globalmente asintoticamente stabile. Questo effetto può essere intuito pensando agli esempi mostrati nel primo paragrafo, (si veda in particolare il sistema (2), in cui si evidenzia come un sistema GAS privo di forzamento possa avere traiettorie illimitate in presenza di un forzamento “vanishing”).

Nel caso venga esplicitamente assunta l’esistenza della traiettoria per ogni  $t$  e la sua limitatezza allora è possibile dedurre condizioni di stabilità globale per il sistema (23) come mostrato nel seguente teorema.

**Theorem 8** *Si consideri il sistema (23) e si assuma che i punti di equilibrio  $x = 0$  del sottosistema (24) e  $z = 0$  del sottosistema (25) siano globalmente asintoticamente stabili. Si supponga inoltre che le traiettorie del sistema (23) esistano per ogni  $t > 0$  e siano limitate. Allora l’equilibrio  $(x, z) = (0, 0)$  del sistema (23) risulta essere globalmente asintoticamente stabile.*

Nel caso non si possa assumere a priori l’esistenza e la limitatezza delle traiettorie allora occorre accontentarsi di risultati di stabilità locali come evidenziato dal successivo teorema.

**Theorem 9** *Si consideri il sistema (23) e si supponga che i punti di equilibrio  $x = 0$  del sottosistema (24) e  $z = 0$  del sottosistema (25) siano localmente asintoticamente stabili. Allora l’equilibrio  $(x, z) = (0, 0)$  del sistema (23) risulta essere localmente asintoticamente stabile.*

L’analisi sopra presentata ha evidenziato come proprietà di stabilità globali del sistema (23) siano indotte da proprietà analoghe dei due sottosistemi a patto di assumere esplicitamente l’esistenza e la limitatezza delle traiettorie.

In questo senso sembra che una proprietà “naturale” che il sottosistema  $x$  debba possedere affinché si possa stabilire stabilità globale asintotica per il sistema (23) partendo da proprietà analoghe dei due sottosistemi, sia la seguente.

*Definition. (CICS)* Un sistema del tipo

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (26)$$

è detto essere “ingresso convergente - stato convergente” (“converging input-converging state”) nel caso per ogni azione forzante  $u(\cdot)$  tale che  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  e per ogni stato iniziale  $x^o$ , la soluzione di (26) esiste e inoltre converge a zero.

Una proprietà meno restrittiva e, come si vedrà nel seguito, alternativa alla precedente per lo studio della cascata (23), risulta essere la seguente:

*Definition. (CIBS)* Un sistema del tipo (26) è detto essere “ingresso convergente - stato limitato” (“converging input-bounded state”) nel caso per ogni azione forzante  $u(\cdot)$  tale che  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  e per ogni stato iniziale  $x^o$ , la soluzione di (26) esiste per ogni  $t \geq 0$  ed è limitata.

*Example.* È facile trovare esempi, neppure troppo patologici, di sistemi GAS che non solo non sono ISS, ma neppure CIBS (e quindi neppure CICS). Un esempio in questo senso è dato dal sistema (2) per cui si è mostrato che una traiettoria di  $u(t)$  convergente a zero può indurre traiettorie illimitate.

Notare invece come il sistema (1), che non risulta essere ISS risulta invece essere CICS (e quindi anche CIBS).

Come anticipato sopra, ai fini dello studio della cascata (23), le due proprietà sopra evidenziate sono equivalenti. Infatti è possibile dimostrare che nel caso un sistema sia GAS (assumendo l'ingresso forzante a zero) allora se il sistema (in presenza di ingresso forzante) è CICS esso è anche CIBS.

Può quindi essere formulato il seguente risultato la cui dimostrazione discende dai risultati sopra riportati.

**Theorem 10** *Si assuma che i sistemi (24) e (25) siano GAS. Si assuma inoltre che il sottosistema (24) sia CIBS. Allora la cascata (23) risulta essere GAS.*

Ovviamente le due definizioni di sistema CICS e CIBS sono automaticamente valide nel caso il sistema risulti essere ISS. In particolare se il sistema  $\dot{x} = g(x, z)$ , visto come sistema con stato  $x$  e ingresso  $z$  è ISS e il sottosistema  $z$  risulta essere GAS allora la cascata (23) è GAS.

In maniera più generale si può considerare l'interconnessione

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z) \\ \dot{z} &= g(z, u)\end{aligned}\tag{27}$$

e dare il seguente risultato che generalizza le considerazioni sopra fatte.

**Theorem 11** *Si assuma che i sistemi  $\dot{x} = f(x, z)$  e  $\dot{z} = g(z, u)$ , visti rispettivamente come sistema con stato  $x$  e ingresso  $z$  e sistema con stato  $z$  e ingresso  $u$ , siano ISS. Allora anche il sistema (27) risulta essere ISS rispetto l'ingresso  $u$ .*

### 3.1 Il teorema del piccolo guadagno

(Riferimenti bibliografici: [2], [1], [3])

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di introdurre uno strumento di fondamentale importanza per lo studio della stabilità di sistemi interconnessi *in retroazione*. Si consideri in particolare l'interconnessione (vedi fig.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u)\end{aligned}\tag{28}$$

con  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , e  $f_1(0, 0) = 0$ ,  $f_2(0, 0, 0) = 0$ . Nel seguito assumeremo che i due sottosistemi siano ISS rispetto ai relativi ingressi (ovvero  $x_2$  per il sottosistema superiore, e  $(x_1, u)$  per il sottosistema inferiore).

Più precisamente assumiamo che per il sottosistema superiore esistano due funzioni  $\gamma_{01}(\cdot)$  e  $\gamma_1(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$ , tali che la risposta  $x_1(\cdot)$  ad ogni ingresso  $x_2(\cdot) \in L_\infty^{n_2}$  con condizione iniziale  $x_1^0$  soddisfi la relazione

$$\|x_1(\cdot)\|_\infty \leq \max\{\gamma_{01}(\|x_1^0\|), \gamma_1(\|x_2(\cdot)\|_\infty)\}$$

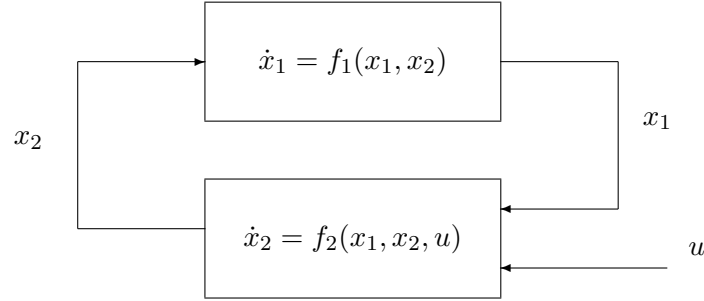


Figure 1: Interconnessione in retroazione.

per ogni  $t \geq 0$ , e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| \leq \gamma_1(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\|).$$

Analogamente assumiamo che per il sottosistema inferiore esistano due funzioni  $\gamma_{02}(\cdot)$ ,  $\gamma_2(\cdot)$ ,  $\gamma_u(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$ , tali che la risposta  $x_2(\cdot)$  ad ogni ingresso  $x_1(\cdot) \in L_\infty^{n_1}$ ,  $u(\cdot) \in L_\infty^m$ , dalla condizione iniziale  $x_2^0$  soddisfi la relazione

$$\|x_2(\cdot)\|_\infty \leq \max\{\gamma_{02}(\|x_2^0\|), \gamma_2(\|x_1(\cdot)\|_\infty), \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}$$

e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| \leq \max\{\gamma_2(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\|), \gamma_u(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|)\}.$$

Lo studio della stabilità del sistema (28) può quindi essere realizzata mediante lo studio della funzione composta dei due guadagni asintotici, ovvero  $\gamma_1 \circ \gamma_2(\cdot)$  come evidenziato dal seguente risultato (comunemente noto come teorema del piccolo guadagno)

**Theorem 12** *Se la funzione composta  $\gamma_1 \circ \gamma_2(\cdot)$  risulta essere una “semplice contrazione”, ovvero*

$$\gamma_1 \circ \gamma_2(r) < r \quad \text{per ogni } r > 0$$

*allora il sistema (28), visto come sistema con stato  $x = (x_1, x_2)$  e ingresso  $u$ , risulta essere ISS. In particolare risulta che la risposta  $x(t)$  ad ogni ingresso  $u(\cdot) \in L_\infty^m$  a partire dalla condizione iniziale  $x^0$  soddisfa le relazioni*

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x^0\|), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|x(t)\| &\leq \gamma(\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|u(t)\|) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_0(r) &= \max\{2\gamma_{01}(r), 2\gamma_{02}(r), 2\gamma_1\gamma_{02}(r), 2\gamma_2\gamma_{01}(r)\} \\ \gamma(r) &= \max\{2\gamma_1\gamma_u(r), 2\gamma_u(r)\}. \end{aligned}$$

## 4 Versioni “locali” di ISS e teorema del piccolo guadagno

(Riferimenti bibliografici: [13], [1], [3])

Le definizioni sopra date di input to state stability hanno un connotato globale, nel senso che le proprietà valgono senza porre restrizioni sul valore degli ingressi esogeni e sullo stato iniziale. Da un punto di vista operativo si vedrà nel seguito che risulta più conveniente generalizzare le definizioni sopra date al fine di evidenziare certe proprietà di ISS solo nel caso di ingressi sufficientemente piccoli e condizioni iniziali sufficientemente vicini all’origine. In questa ottica la seguente definizione rappresenta una naturale estensione della definizione 1.1.

*Definition.* Un sistema non lineare  $\dot{x} = f(x, u)$  con stato  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ed ingresso  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  è detto essere ingresso limitato-stato limitato con restrizioni  $X$  sullo stato iniziale e  $\Delta := (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$  sugli ingressi se, per ogni  $x_0 \in X$  e ogni ingresso  $\|u_i(\cdot)\|_\infty < \Delta_i$  limitato, esistono funzioni  $\gamma_0(\cdot)$  e  $\gamma_1(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  tali che la soluzione del sistema con stato iniziale  $x(0) = x_0$  esiste per ogni  $t \in [0, \infty)$  e soddisfa

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x(0)\|), \gamma_1(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \gamma_1(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|). \end{aligned}$$

In analogia a quanto visto sopra nel caso di ISS “globale”, un sistema risulta essere ISS “con restrizioni” se esiste una funzione di Lyapunov locale ingresso limitato-stato limitato definita nel modo seguente.

*Definition.* Una funzione  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  di tipo  $\mathcal{C}^1$  è detta una funzione di Lyapunov locale ingresso limitato-stato limitato (ISS-local Lyapunov function) per il sistema (3) se esistono delle funzioni  $\underline{\alpha}(\cdot)$ ,  $\bar{\alpha}(\cdot)$ ,  $\alpha(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}_\infty$ , una funzione  $\chi(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$  e dei numeri positivi  $\delta_x$  e  $\delta_u$  tali che

$$\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|)$$

e

$$\chi(\|u\|) < \|x\| < \delta_x, \quad \|u\| \leq \delta_u \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\alpha(\|x\|).$$

Si può facilmente vedere che nel caso esista una  $V$  con le proprietà sopra specificate, allora il sistema risulta ISS con restrizioni  $X = \{x : \|x\| < r\}$  sullo stato iniziale e  $\Delta$  sugli ingressi, dove  $r$  e  $\Delta$  sono tali per cui

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha}(r) &\leq \delta_x \\ \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha} \circ \chi(\Delta) &\leq \delta_x \\ \Delta &\leq \delta_u. \end{aligned}$$

e inoltre lo stato del sistema risulta convergere verso l’insieme chiuso

$$\{x : \|x\| \leq \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha} \circ \chi(\Delta)\}.$$

Si può inoltre generalizzare il teorema del piccolo guadagno presentato sopra al fine di trattare interconnessioni in retroazione di sistemi dinamici ISS con restrizioni. In particolare si faccia riferimento all'interconnessione (28) e si supponga che per il sottosistema superiore esistano due funzioni  $\gamma_{01}(\cdot)$  e  $\gamma_1(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$ , un insieme  $X_1$  e un numero  $\Delta_1 > 0$  tali che la risposta  $x_1(\cdot)$  a partire da uno stato iniziale  $x_1(0) = x_1^o \in X_1$  e con ingresso  $x_2(\cdot)$  tale che  $\|x_2(\cdot)\|_\infty \leq \Delta_1$  soddisfi la relazione

$$\|x_1(\cdot)\|_\infty \leq \max\{\gamma_{01}(\|x_1^o\|), \gamma_1(\|x_2(\cdot)\|_\infty)\}$$

per ogni  $t \geq 0$ , e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| \leq \gamma_1(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\|).$$

Analogamente assumiamo che per il sottosistema inferiore esistano tre funzioni  $\gamma_{02}(\cdot)$ ,  $\gamma_2(\cdot)$ ,  $\gamma_u(\cdot)$  di classe  $\mathcal{K}$ , un intorno  $X_2$  dell'origine e due numeri positivi  $\Delta_2$ ,  $\Delta_u$ , tali che la risposta  $x_2(\cdot)$  a partire da uno stato iniziale  $x_2(0) = x_2^o \in X_2$  ad ogni ingresso  $x_1(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$ , tali che  $\|x_1(\cdot)\|_\infty \leq \Delta_2$  e  $\|u(\cdot)\|_\infty \leq \Delta_u$  soddisfi la relazione

$$\|x_2(\cdot)\|_\infty \leq \max\{\gamma_{02}(\|x_2^o\|), \gamma_2(\|x_1(\cdot)\|_\infty), \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)\}$$

e

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| \leq \max\{\gamma_2(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\|), \gamma_u(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|)\}.$$

Si definiscano inoltre

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= \{x : \gamma_{01}(\|x\|) < \Delta_2, \quad \gamma_2 \circ \gamma_{01} < \Delta_1\} \cap X_1 \\ \tilde{X}_2 &= \{x : \gamma_{02}(\|x\|) < \Delta_1, \quad \gamma_1 \circ \gamma_{02} < \Delta_2\} \cap X_2 \end{aligned} \quad (29)$$

e sia  $\Delta$  un numero positivo tale che

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \Delta_u \\ s \in [0, \Delta] &\quad \Rightarrow \quad \gamma_u(\Delta) < \Delta_1; \quad \gamma_1 \circ \gamma_u(\Delta) < \Delta_2. \end{aligned} \quad (30)$$

In questo contesto vale allora il seguente risultato ([13]).

**Theorem 13** *Si consideri il sistema (28) e si supponga che i due sottosistemi soddisfino le proprietà sopra enunciate. Allora se*

$$\gamma_1 \circ \gamma_2(r) < r \quad \forall r > 0$$

*il sistema (28) risulta essere ISS con restrizioni  $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$  sullo stato iniziale, restrizione  $\Delta$  sull'ingresso  $u$ , con  $\tilde{X}_1$ ,  $\tilde{X}_2$  e  $\Delta$  definiti come in (29), (30). In particolare risulta che la risposta  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$  ad ogni ingresso  $u(\cdot)$  tale che  $\|u(\cdot)\|_\infty \leq \Delta$  a partire dalla condizione iniziale  $x^o = (x_1^o, x_2^o) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$  soddisfa le relazioni*

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max\{\gamma_0(\|x^o\|), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \gamma(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_0(r) &= \max\{2\gamma_{01}(r), 2\gamma_{02}(r), 2\gamma_1\gamma_{02}(r), 2\gamma_2\gamma_{01}(r)\} \\ \gamma(r) &= \max\{2\gamma_1\gamma_u(r), 2\gamma_u(r)\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Come si vedrà più avanti risulta essere particolarmente interessante il caso particolare in cui i due sottosistemi che compongono l'interconnessione (28) siano ISS *senza* restrizioni sullo stato iniziale e restrizioni non nulle sugli ingressi, ovvero soddisfino le proprietà sopra enunciate con  $X_1 = \mathbb{R}^{n_1}$  e  $X_2 = \mathbb{R}^{n_2}$ . In questo contesto il precedente teorema può essere opportunamente riformulato nel modo seguente.

**Corollary 1** *Si consideri il sistema (28) e si supponga che i due sottosistemi siano ISS senza restrizioni sullo stato iniziale e restrizioni non nulle sugli ingressi. Allora se*

- *esiste un tempo  $T^* > 0$  tale che*

$$\|x_1(t)\| < \Delta_2, \quad \|x_2(t)\| < \Delta_1$$

*per ogni  $t \geq T^*$ ;*

- *non esistono “finite escape times” nell’intervallo  $[0, T^*]$ ;*
- *la funzione  $\gamma_1 \circ \gamma_2(\cdot)$  è una contrazione semplice,*

*l’interconnessione (28) risulta essere ISS senza restrizioni sullo stato iniziale, restrizione  $\Delta$  sull’ingresso  $u$ , con delta definita in (30) e guadagni  $\gamma_0(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$  definiti in (31).*

Si vedrà più avanti, presentando la stabilizzazione di sistemi con struttura feedforward, come le prime due ipotesi (soddisfacimento delle restrizioni e assenza di “finite escape time”) possano essere automaticamente soddisfatte senza richiederle esplicitamente.

## 5 Relazione tra stabilità asintotica di un equilibrio e ISS

(Riferimenti bibliografici: [13], [3])

Come visto nel primo paragrafo attraverso una serie di esempi, la presenza di un punto di equilibrio GAS per il sistema nonlineare

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{32}$$

con  $u(t) = 0$  non implica in generale la stabilità interna del sistema (ISS) se  $u(t) \neq 0$ . L’obiettivo di questo paragrafo è quello di investigare meglio la relazione che esiste tra stabilità asintotica e stabilità interna studiando da un lato sotto quali condizioni la presenza di un punto di equilibrio GAS (per  $u=0$ ) implichi anche ISS (con  $u \neq 0$ ) e, dall’altro, se è possibile “robustificare” una eventuale legge di controllo stabilizzante un punto di equilibrio al fine di ottenere GAS + ISS.

Il teorema successivo mostra come sotto due forti ipotesi, ovvero stabilità esponenziale globale del punto di equilibrio e campo vettoriale  $f(x, u)$  globalmente Lipschitz, allora la proprietà di ISS venga automaticamente dalla stabilità esponenziale.

**Theorem 14** *Si assuma che il sistema (32) abbia il punto di equilibrio  $x = 0$  che sia globalmente esponenzialmente stabile nel caso  $u = 0$  e che il campo di vettori  $f(x, u)$  sia globalmente Lipschitz in  $(x, u)$ , ovvero che esistano due numeri  $L_1$  e  $L_2$  tali che*

$$\begin{aligned}\|f(x, u) - f(x, 0)\| &\leq L_1 \|u\| \\ \|f(x, u) - f(0, u)\| &\leq L_2 \|x\|\end{aligned}$$

per ogni  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Allora il sistema (32) è ISS.

Il teorema appena enunciato riporta condizioni *solo sufficienti*. Il fatto che tale ipotesi non siano assolutamente necessarie è provato dal seguente contro-esempio.

*Example.* Si consideri il sistema

$$\dot{x} = f(x, u) = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2$$

che ha il punto di equilibrio  $x = 0$  GES nel caso  $u = 0$  ma, tuttavia, non soddisfa le ipotesi del teorema precedente in quanto  $f(x, u)$  non risulta globalmente Lipschitz. Tuttavia è facile verificare che prendendo  $V(x) = x^2/2$  come funzione di Lyapunov ISS candidata si ottiene

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1 + x^2)u^2 = -(1 + 2x^2)x^2 + (1 + x^2)xu^2 \leq -x^4, \quad \forall \|x\| \geq u^2.$$

Quindi il sistema risulta essere ISS con funzione  $\chi(r) = r^2$  (si veda la definizione (1.1)).

L'importanza dell'ipotesi di avere l'equilibrio GES, oltre ad avere il campo di vettori  $f(x, u)$  globalmente Lipschitz, è inoltre evidenziato dal seguente esempio.

*Example.* Si consideri il sistema

$$\dot{x} = f(x, u) = -\tanh(x) + u$$

il cui equilibrio  $x = 0$  risulta GAS (ma non GES) per  $u = 0$  ed è caratterizzato da  $f(x, u)$  globalmente Lipschitz. Tuttavia nel caso  $u(t) \equiv 1, t \geq 0$ , tutte le traiettorie divergono.

Il teorema (14) mostra condizioni sotto le quali è possibile affermare la stabilità ISS “globale”, ovvero senza restrizioni sugli ingressi e sullo stato iniziale. Il successivo risultato mostra che nel caso ci si “accontenti” di avere caratteristiche di ISS con restrizioni (sufficientemente piccole) sugli ingressi e sullo stato iniziale, allora stabilità asintotica e ISS locale possono confondersi.

**Theorem 15** *Sia  $x = 0$  un punto di equilibrio localmente asintoticamente stabile del sistema (32) con  $u = 0$ . Allora esiste un intorno aperto  $X$  dell'origine e un vettore  $\Delta$  di numeri positivi, tali che (32) risulta essere ISS con restrizioni  $X$  sullo stato iniziale e  $\Delta$  sull'ingresso.*

*Example.* A titolo di esempio si consideri il sistema

$$\dot{x} = -x + xu$$

che risulta GES (se  $u \equiv 0$ ) ma non risulta essere ISS (il segnale  $u(t) \equiv 2, t \geq 0$  porta traiettorie illimitate). Tuttavia, fissando  $\Delta < 1$ , si ha che il sistema sopra risulta essere ISS senza restrizioni sullo stato iniziale e restrizione  $\Delta$  sull'ingresso  $u$ .



Infine verrà enunciato un risultato di una notevole importanza che sancisce che nel caso l'origine del sistema (32) risulti GAS per  $u = 0$ , allora attraverso una trasformazione in retroazione del tipo

$$u = \beta(x)v$$

con  $\beta(x)$  opportunamente definita, è sempre possibile rendere tale sistema ISS rispetto l'ingresso  $v$ . In altre parole la stabilità globale asintotica è sempre equivalente mediante opportuna retroazione alla proprietà ISS.

**Theorem 16** *Si assuma che l'origine del sistema (32) sia GAS con  $u = 0$ . Allora esiste sempre una matrice  $\beta(x)$  di dimensioni  $m \times m$  composta da funzioni smooth, che risulta definita e non singolare per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , e tale che il sistema*

$$\dot{x} = f(x, \beta(x)v)$$

è ISS.

## 5.1 Alcuni esempi

*Example.* Consideriamo un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e supponiamo che esista una matrice  $P$  tale che

$$PA + A^T P = -I.$$

Prendendo  $V = x^T P x$  si ha che esistono due numeri positivi  $a_1$  e  $a_2$  tali che

$$a_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq a_2 \|x\|^2.$$

Derivando  $V$  lungo le soluzioni del sistema si ottiene

$$\frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) \leq -\|x\|^2 + 2\|x\| \|P\| \|B\| \|u\|.$$

Si prenda ora  $0 < \epsilon < 1$  e sia

$$c = \frac{2}{1-\epsilon} \|P\| \|B\|, \quad \chi(r) = cr.$$

È immediato verificare quindi che

$$\|x\| \geq \chi(\|u\|) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) \leq -\epsilon \|x\|^2,$$

ovvero il sistema risulta ISS con guadagno

$$\gamma(r) = \frac{a_2}{a_1} cr.$$

*Example.* Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

e la funzione di Lyapunov ISS candidata  $V(x) = x^2/2$ . Derivando  $V$  si ottiene

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1 - \epsilon)x^4 - \epsilon x^4 + xu$$

con  $0 < \epsilon < 1$ . Quindi

$$|x| \geq \left(\frac{|u|}{\epsilon}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} \leq -(1 - \epsilon)x^4$$

ovvero il sistema risulta essere ISS con guadagno

$$\gamma(r) = \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^{1/3} .$$

*Example.* Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = -\lambda \text{sat}\left(K \frac{x}{\lambda}\right) + v_1$$

con  $\lambda$  e  $K$  numeri positivi e dove  $\text{sat}(\cdot)$  rappresenta la classica funzione di saturazione definita come

$$\text{sat}(r) = \begin{cases} r & \text{se } |r| < 1 \\ \text{sgn}(r) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si consideri ora la funzione di Lyapunov ISS candidata definita come  $V(x) = |x|$ . Derivando otteniamo

$$\dot{V} = \frac{x}{|x|} \dot{x} = \frac{x}{|x|} \left(-\lambda \text{sat}\left(K \frac{x}{\lambda}\right) + v_1\right) .$$

Allora si ha che la funzione  $V$  è decrescente se

$$\lambda \text{sat}\left(K \frac{|x|}{\lambda}\right) > |v_1| . \quad (33)$$

Tale condizione può essere verificata per qualche valore di  $x$  solo se l'ingresso esogeno soddisfa la *restrizione*

$$|v_1| < \lambda .$$

Dalla definizione di funzione di saturazione si ottiene inoltre che la condizione (33) è verificata se

$$|x| > \frac{|v_1|}{K} .$$

Quindi si ha che

$$|x| > \frac{|v_1|}{K}, \quad |v_1| < \lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{V} < 0$$

ovvero il sistema risulta essere ISS senza restrizioni sullo stato iniziale, restrizione  $\lambda$  sull'ingresso  $v_1$  e guadagno (si noti che in questo caso  $\underline{\alpha}(r) = \bar{\alpha}(r) = r$  e  $\chi(r) = r/K$ )

$$\gamma_1(r) = \underline{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha} \circ \chi(r) = \frac{r}{K} .$$

## References

- [1] Isidori A., *Nonlinear Control System II*, Springer-Verlag, NewYork, 1999.
- [2] Jiang Z.P., Teel A., Praly L., “Small gain theorem for ISS systems and applications”, *Math. Contr. Sign. Syst.*, 7 (1994), pp. 95-120.
- [3] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, New York: Macmillan, 1992.
- [4] Sontag E.D., “Smooth stabilization implies coprime factorization,” *IEEE Trans. Automatic Control*, 34(1989): 435-443.
- [5] Sontag E.D., “Remarks on the stabilization and input to state stability” *IEEE Conf. Decision and Control*, Tampa, Dec. 1989.
- [6] Sontag E.D., “Further facts about input to state stabilization”, *IEEE Trans. Automatic Control*, 35(1990): 473-476.
- [7] Sontag E.D., Wang Y., “On characterizations of the input-to-state stability property,” *Systems and Control Letters* 24 (1995): 351-359.
- [8] Sontag E.D., “On the input-to-state stability property,” *European J. Control* 1(1995): 24-36.
- [9] Sontag E.D., Wang Y., “New characterizations of input to state stability,” *IEEE Trans. Autom. Control* 41(1996): 1283-1294.
- [10] Sontag E.D., Wang Y., “Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems,” *Systems and Control Letters* 29(1997): 279-290.
- [11] Sontag E.D., “The ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behaviour”, *Nonlinear Control Network Workshop*, June 2000, Paris, France.
- [12] Teel A., Sontag E.D., “Changing supply functions in input/state stable systems,” *IEEE Trans. Autom. Control* 40(1995): 1476-1478.
- [13] Teel A., “A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturations”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41 (1996), 1256–1270.
- [14] Home Page di E.D. Sontag: “<http://www.math.rutgers.edu/sontag/>”.